Integralni zakoni elektrodinamike izražavaju odnose između izvesnih integralnih veličina koje karakterišu elektromagnetno polje. Međutim, često je od interesa poznavati elektromagnetno polje u svakoj tački prostora u svakom trenutku. Takvi zakoni se mogu izraziti u diferencijalnom obliku i stoga se nazivaju *diferencijalni zakoni*. Ovi zakoni predstavljaju *diferencijalne jednačine elektromagnetnog polja*.

Naelektrisane čestice kao *izvori* elektromagnetnog polja mogu se okarakterisati gustinama naelektrisanja i struje[1], $\rho(\mathbf{r},t)$ i $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$, koje su povezane jednačinom kontinuiteta. Generisano elektromagnetno polje se u trodimenzionalnom fizičkom porstoru najadekvatnije karakteriše jačinom električnog polja $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ i magnetnetnom indukcijom $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$. Intuitivno je jasno da ρ i $\mathbf{j}$ s jedne, i $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ s druge strane, moraju biti *uzajamno uslovljeni*. Ova uzajamna uslovljenost se, u slučaju vremenski promenljivih polja, najuspešnije izražava *Maksvelovim jednačinama*.

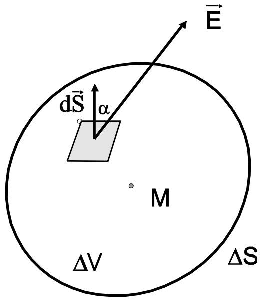
Malsvelove jednačine su jednačine koje opisuju klasično elektromagnetno polje. One su potvrđene u velikom broju eksperimenata. One povezuju izvore polja: gustinu naelektrisanja $\rho(\mathbf{r},t)$ u gustinu struje $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ sa veličinama $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ i $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$.

[1] Ukoliko su ispunjeni uslovi primenljivosti modela kontinuuma naelektrisanja, gustine $\rho(\mathbf{r},t)$ i $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ su neprekidne funkcije svojih argumenata. U daljem tekstu pri pisanju jednačina, navođenjem argumenata $(\mathbf{r},t)$ koji se obično izostavljaju (podrazumevaju), naglašeno je da se sve veličine koje se u njima pojavljuju uzimaju u istoj tački prostora i u istom trenutku vremena.

1. Gausov zakon u diferencijalnom obliku

Uočimo neku tačku M i neku malu zatvorenu površ ΔS oko ove tačke (Slika 1), pa primenimo Gausovu teoremu[2] na ovu površ u obliku

$$\oint_{\Delta S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Delta V} \rho \, dV \,. \tag{1}$$



Slika 1. Primena Gaussove teoreme na malu zatvorenu površ ΔS .

Na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti funkcije, desnu stranu možemo transformisati na sledeći način

$$\oint_{\Delta S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \overline{\rho} \, \Delta V \,,$$

a deobom obeju strana sa ΔV i puštajući da ΔV teži nuli skupljajući se u tačku M, dobijamo

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_{\Delta S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} \overline{\rho} \,. \tag{2}$$

Izraz sa leve strane prema definiciji divergencije predstavlja divergenciju vektora $\mathbf{E}$ u tački M, a ako je $\rho(\mathbf{r}, t)$ neprekidna funkcija položaja u tački M, $\lim_{\Delta V \to 0} \overline{\rho}$ predstavljaće vrednost prostorne gustine u tački M

$$\left(div\mathbf{E} \right)_M = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\rho \right)_M \,. \tag{3}$$

Ovo je *prva Maksvelova jednačina*, koja izražava *Gausov zakon u diferencijalnom obliku*. Ona daje vezu u vidu diferencijalne jednačine između jačine električnog polja i prostorne gustine u svakoj tački polja u ma kom trenutku, a imajući u vidu i fizički smisao divergencije, fizički smisao gornje

[2] Gausova teorema u integralnom obliku: $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_V q_i$

jednačine možemo formulisati na sledeći način: *Naelektrisanja stvaraju električno polje, čije su linije sila otvorene i imaju početak i kraj u ovim naelektrisanjima*.

2. Amperova hipoteza u diferencijalnom obliku

Ako primenimo Amperovu hipotezu[3] na ma kakvu malu zatvorenu površ ΔS oko tačke M, imaćemo

$$\oint_{\Delta S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \,. \tag{4}$$

Deobom sa ΔV i prelaskom na granične vrednosti kad ΔV teži nuli, dobićemo

$$\lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} = 0 \,, \tag{5}$$

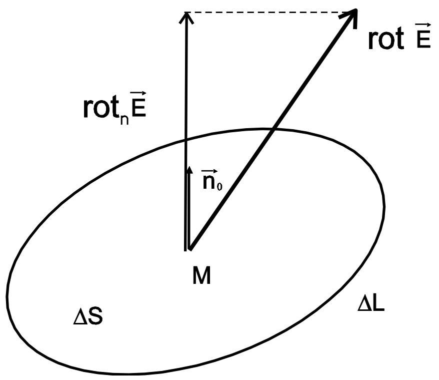
što se može napisati u obliku

$$\left(div\mathbf{B} \right)_M = 0 \,. \tag{6}$$

Ovo je *druga Maksvelova jednačina*, koja izražava *Amperovu hipotezu u diferencijalnom obliku*. Ona daje uslov koji mora zadovoljavati magnetna indukcija u svakoj tački polja u ma kom trenutku, a njen fizički smisao sastoji se u sledećem: *magnetna naelektrisanja ne postoje, te magnetne linije sila nemaju ni početka ni kraja, tj. one su uvek bezizvorne i u većini slučajeva zatvorene*.

3. Faradejev zakon indukcije u diferencijalnom obliku

Uočimo neku tačku M i neku malu zatvorenu konturu ΔL oko ove tačke i ma kakvu površ ΔS koja je oivičena ovom konturom i prolazi kroz tu tačku (Slika 2).



Slika 2. Uz izvođenje jednačine $rot\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B} / \partial t$.

[3] Amperova hipoteza u integralnom obliku: $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$

Primenimo sada Faradayev zakon indukcije[4] na ovu konturu

$$\oint_{\Delta L} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_{\Delta S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} . \tag{7}$$

Na desnoj strani možemo izmeniti redosled operacija[5]

$$\oint_{\Delta L} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{\Delta S} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = -\int_{\Delta S} \frac{\partial B_n}{\partial t} dS . \tag{8}$$

Na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti funkcije integral na desnoj strani postaje

$$\oint_{\Delta L} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\overline{\frac{\partial B_n}{\partial t}} \Delta S ,$$

pa deobom obe strane sa ΔS i puštajući da ΔS teži nuli skupljajući se u tačku M, dobićemo

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_{\Delta L} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} = -\lim_{\Delta S \to 0} \overline{\frac{\partial B_n}{\partial t}} . \tag{9}$$

Izraz na levoj strani prema definiciji rotora predstavlja normalnu kompomentu rotora vektora $\mathbf{E}$ u pravcu normale $\mathbf{n}_0$ na površ ΔS u tački M, i ako je $\partial B_n / \partial t$ neprekidna funkcija položaja u toj tački, biće

$$\left(rot_n \mathbf{E} \right)_M = -\left(\frac{\partial B_n}{\partial t} \right)_M . \tag{10}$$

Ako se ova relacija primeni na pravce koordinatnih osa, imaćemo tri skalarne jednačine

$$rot_x \mathbf{E} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}, \; rot_y \mathbf{E} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}, \; rot_z \mathbf{E} = -\frac{\partial B_z}{\partial t},$$

što zajedno možemo napisati u vektorskom obliku

$$\left(rot \mathbf{E} \right)_M = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} . \tag{11}$$

Ovo je *treća Maksvelova jednačina*, koja izražava *Faradejev zakon indukcije u diferencijalnom obliku*. Ona daje vezu u vidu diferencijalne jednačine između jačine električnog polja i magnetne indukcije promenljivog magnetnog polja u svakoj tački u ma kom trenutku, a imajući u vidu fizički smisao rotora, fizički smisao gornje jednačine možemo formulisati na sledeći način: *Menjanjem magnetog polja stvara se električno, čije su linije sila zatvorene i obavijaju magnetne linije sila*.

---

[4] Faradejev zakon indukcije u integralnom obliku: $\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$

[5] Izmena redosleda operacija je ovde moguća jer je $\mathbf{B}$ funkcija i položaja i vremena, pa ako prvo diferenciramo $\mathbf{B}$ po vremenu, dobićemo parcijalni izvod $\partial \mathbf{B} / \partial t$, a ako se $\mathbf{B}$ prvo integrali po površi S, ovaj integral $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ zavisiće samo od vremena.

4. Amper-Maksvelov zakon u diferencijalnom obliku

Primenimo sada Maksvelov zakon[6] na neku konturu ΔL oko uočene tačke M, međutim ukoliko postoje i stacionarne struje, moramo problem rastaviti na dva dela[7]. Ukupnu indukciju magnetnog polja $\mathbf{B}$ moramo rastaviti na dve komponente

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \,, \tag{12}$$

gde prva potiče od promene jačine električnog polja, a druga od stacionarnih struja.

Za prvu komponentu $\mathbf{B}_1$ važi neposredno Maksvelov zakon, a za drugu Amperova teorema

$$\oint\limits_{\Delta L} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int\limits_{\Delta S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \,, \quad \oint\limits_{\Delta L} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int\limits_{\Delta S} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \,. \tag{13}$$

Desnu stranu prve jednačine možemo transformisati na sličan način kao i u prethodnom slučaju

$$\oint\limits_{\Delta L} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \int\limits_{\Delta S} \frac{\partial E_n}{\partial t} dS = \varepsilon_0 \mu_0 \overline{\frac{\partial E_n}{\partial t}} \Delta S$$

pa deljenjem sa ΔS i prelaskom na granične vrednosti odavde dobijamo

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint\limits_{\Delta L} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} = \varepsilon_0 \mu_0 \lim_{\Delta S \to 0} \overline{\frac{\partial E_n}{\partial t}} \,, \tag{14}$$

odnosno

$$\left(rot_n \mathbf{B}_1 \right)_M = \varepsilon_0 \mu_0 \left(\frac{\partial E_n}{\partial t} \right)_M . \tag{15}$$

Drugu jednačinu (13) možemo transformisati neposrednom primenom teoreme o srednjoj vrednosti funkcije

$$\oint\limits_{\Delta L} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int\limits_{\Delta S} j_n dS = \mu_0 \overline{j_n} \Delta S \,,$$

pa deobom sa ΔS i prelaskom na graničnu vrednost puštajući da ΔS teži nuli, dobijamo

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint\limits_{\Delta L} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} = \mu_0 \lim_{\Delta S \to 0} \overline{j_n} \,. \tag{16}$$

Ako je $j_n(x, y, z, t)$ neprekidna funkcija položaja u tački M, gornja relacija postaje

$$\left(rot_n \mathbf{B}_2 \right)_M = \mu_0 \left(j_n \right)_M . \tag{17}$$

---

[6] $\oint\limits_{L} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int\limits_{S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$

[7] Iako se vrednost jačine magnetnog polja svakog pojedinačnog elektrona u nekoj fiksiranoj tački M menja u toku vremena, u slučaju stacionarnih struja *srednja vremenska vrednost* jačine magnetnog polja u toj tački, koja se jedino može dobiti merenjem, biće stalna u toku vremena. Stoga Maksvelov zakon primenjen na makroskopske vrednosti ne daje nam magnetno polje stacionarne struje.

Konačno, normalna komponenta rotora ukupne jačine magnetnog polja $\mathbf{B}$ u tački M biće

$$\left(rot_n\mathbf{B}\right)_M = \left(rot_n\mathbf{B}_1\right)_M + \left(rot_n\mathbf{B}_2\right)_M,$$

što daje

$$\left(rot_n\mathbf{B}\right)_M = \mu_0\left(j_n\right)_M + \varepsilon_0\mu_0\left(\frac{\partial E_n}{\partial t}\right)_M. \tag{18}$$

Ako se ova relacija primeni na koordinatne ose, tj. stavimo li umesto n indekse x, y i z, dobijaju se tri skalarne jednačine, koje se zajedno mogu napisati u vektorskom obliku

$$\left(rot\mathbf{B}\right)_M = \mu_0\left(\mathbf{j}\right)_M + \varepsilon_0\mu_0\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)_M. \tag{19}$$

Ovo je *četvrta Maksvelova jednačina*, koja izražava *Amper-Maksvelov zakon u diferencijalnom obliku*. Ona nam daje vezu u vidu diferencijalne jednačine između indukcije magnetnog polja, strujne gustine i jačine promenljivog električnog polja u svakoj tački i u ma kom trenutku, a njen fizički smisao sastoji se u sledećem: *Stacionarnim kretanjem naelektrisanja kao i menjanjem električnog polja stvara se magnetno, čije linije sila obavijaju strujne linije odnosno električne linije sila*.

Sabirak $\varepsilon_0\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ ima dimenzije gustine struje, i po Maksvelu, naziva se *struja pomeraja* (nasuprot veličini $\mathbf{j}$ koja je u vezi sa kretanjem naelektrisanih čestica i zove se *struja provođenja* ili *kondukciona struja*).

5. Zakon održanja naelektrisanja u diferencijalnom obliku

Podestimo se zakona održanja naelektrisanja u integralnom obliku

$$-\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = \oint_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}. \tag{20}$$

Ako se na levoj strani izmeni redosled operacija, a desnoj primeni Gaussova teorema, dobija se

$$-\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV = \int_V div\mathbf{j}\, dV. \tag{21}$$

Pošto ova jednakost mora da važi za bilo koju oblast V, odgovarajući integrandi u svakoj tački moraju biti međusobno jednaki

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t} = div\mathbf{j} \tag{22}$$

odnosno

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\mathbf{j} = 0\,. \qquad (23)$$

Ovo je tzv. *jednačina kontinuiteta naelektrisanja*, koja izražava *zakon održanja naelektrisanja u diferencijalnom obliku* i povezuje prostornu i strujnu gustinu u svakoj tački u ma kom trenutku.

5. Sistem Maksvelovih jednačina za vakuum

Jednačine

$$\begin{aligned} div\mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0}\rho, \quad div\mathbf{B} = 0, \\ rot\mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad rot\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \qquad (24)$$

koje izražavaju osnovne zakone elektrodinamike u diferencijalnom obliku prvi put su formulisane od strane Maksvela i stoga se one nazivaju *Maksvelove jednačine za vakuum*, jer se odnose na elektromagnetno polje sa sistemom slobodnih naelektrisanja u vakuumu. Ovim jednačinama treba pridružiti i navedeni zakon održanja naelektrisanja u obliku jednačine kontinuiteta (23) mada se za slučaj slobodnih naelektrisanja ona može dobiti i kao posledica Maksvelovih jednačina.

Maksvelove jednačine predstavljaju *diferencijalne jednačine elektromagnetnog polja u vakuumu* i pri datoj prostorno-vremenskoj raspodeli naelektrisanja i struja, uz date početne i granične uslove, one potpuno određuju *jačinu električnog polja i magnetnu indukciju* kao funkcije položaja i vremena, tj. $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ i $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$.

7. Neke osobine Maksvelovih jednačina

Neposrednim posmatranjem Maksvelovih jednačina za elektromagnetno polje u vakuumu

$$div\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r},t), \tag{25}$$

$$div\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=0, \tag{26}$$

$$rot\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=-\frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t}, \tag{27}$$

$$rot\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r},t)+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t}, \tag{28}$$

zapažaju se neke njihove interesantne osobine. Među njima se izdvajaju sledeće:

(A) Gustine naelektrisanja i struja (veličine koje karakterišu izvore polja) javljaju se samo u dve Maxwellove jednačine (prvoj i četvrtoj). Stoga se Maxwellove jednačine mogu podeliti u dve grupe, tzv. *„bezizvorne jednačine“* i *„jednačine sa izvorima“*.

(B) “Bezizvorne jednačine“, druga i treća, dopuštaju definisanje *potencijala elektromagnetnog polja*. Konkretno, iz jednačine (26) proizilazi da postoji vektorska funkcija $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$, takva da je $\mathbf{B}=rot\mathbf{A}$. O potencijalima elektromagnetnog polja biće detaljnije reči nakon uvođenja Maksvelovih jednačina za materijalne sredine.

(C) Na osnovu „jednačina sa izvorima“ se pokazuje saglasnost Maksvelovih jednačina sa jedančinom kontinuiteta naelektrisanja. Uzimanjem divergencije obeju strana četvrte Maksvelove jednačine uz pomoć identiteta $div\,rot\mathbf{U}=0$ nalazi se

$$0=\mu_0\left(div\mathbf{j}+\varepsilon_0 div\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)=\mu_0\left(div\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial t}div\,\varepsilon_0\mathbf{E}\right), \tag{29}$$

a odavde se na osnovu prve Maksvelove jednačine dobija jednačina kontinuiteta naelektrisanja. Bilo bi, naravno, pogrešno reći da je jednačina kontinuiteta posledica Maksvelovih jednačina. Jednačina kontinuiteta je izraz fundamentalne osobine održanja naelektrisanja, pa bilo koja elektrodinamička teorija mora biti u saglasnosti sa njom.

(D) U Maksvelovim jednačinama su jačina električnog polja i magnetna indukcija *uzajamno spregnute*, tj. vremenska promena bilo koga od tih polja uslovljava nastajanje drugog polja. Ta se sprega još bolje uočava kada se iz (27) i (28) prepišu u obliku

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -rot\mathbf{E}\,, \tag{30}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\mu_0} rot\mathbf{B} - \mathbf{j}\right). \tag{31}$$

Odavde se istovremeno vidi i da jačina električnog polja i magnetna indukcija *ne ulaze u Maksvelove jednačine na ravnopravan način*: za razliku od promene magnetne indukcije sa vremenom, koja je određena rotorom jačine električnog polja, promena jačine električnog polja ne zavisi samo od rotora jačine magnetnog polja već i od karakteristika izvora polja (tj. od kondukcione struje)[8].

(E) Neravnopravnost jačina električnog i magnetnog polja u Maksvelovim jednačinama je delom u vezi sa činjenicom, da je vektor $\mathbf{E}$ *pravi vektor,* dok je $\mathbf{B}$ *pseudovektor.* Na osnovu ove činjenice lako se zaključuje da Maksvelove jednačine *ostaju invarijantne pri inverziji prostornih koordinata.* Kod provere ove tvrdnje treba imati u vidu da je ρ pravi skalar, a $\mathbf{j}$ pravi vektor [ovo proiziliazi iz $\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \rho(\mathbf{r},t)\,\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$]. Međutim, pri *inverziji vremena*[9] u Maksvelove jednačine *ostaju invarijantne samo ako se tom prilikom izmeni i znak magnetnog polja* (tj. stavi $\mathbf{B}' = -\mathbf{B}$, ali $\mathbf{E}' = \mathbf{E}$). Ovo je dalja manifestacija neravnopravnosti $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ u tim jednačinama, ali je njen smisao lako shvatljiv: *da bi kretanje koje u stacionarnom električnom i magnetnom polju vrši naelektrisana čestica (ili sistem takvih čestica) bilo reverzibilno, tj. da bi nakon zamišljenog zaustavljanja čestice (čestica) i saopštavanja nove početne brzine $v' = -v$ (i analogno za sistem) prošla obrnutim redosledom kroz svoja prethodna dinamička stanja, mora se obrnuti i smer magnetnog polja.*

---

[8] Ova neravnopravnost $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ u Maxwellovim jednačinama se još bolje uočava kad se (25-28) zamene ekvivalentnim sistemom jednačina u kojima su $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ razdvojeni. Ako se (28) ili (31) diferenciraju po vremenu pa iskoristi rotor jednačine (27) i tako eliminiše $\mathbf{B}$, dobiće se:

$$\Delta\mathbf{E} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0} grad\,\rho + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}$$

pri izvođenju ovog rezultata uzima se u obzir komutativnost operatora $\partial / \partial t$ i rot. Analognim postupkom se iz (28) ili (30) može naći:

$$\Delta\mathbf{B} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -\mu_0\, rot\,\mathbf{j}\,.$$

[9] Kod izvođenja ove operacije treba, osim $t' = -t$, staviti još $\mathbf{j}' = -\mathbf{j}$ [opet u skladu sa $\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \rho(\mathbf{r},t)\,\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$] i $\rho' = \rho$.

(F) Maksvelove jednačine su *linearne*, iz čega proizilazi sledeća vrlo važna osobina. Ako sa $\rho_1(\mathbf{r},t)$ i $\mathbf{j}_1(\mathbf{r},t)$ označimo gustine naelektrisanja i struja jednog sistema naelektrisanih čestica[10], a sa $\rho_2(\mathbf{r},t)$ i $\mathbf{j}_2(\mathbf{r},t)$ analogne veličine nekog drugog sistema takvih čestica, onda elektromagnetna polja $\mathbf{E}_1(\mathbf{r},t), \mathbf{B}_1(\mathbf{r},t)$ i $\mathbf{E}_2(\mathbf{r},t), \mathbf{B}_2(\mathbf{r},t)$ koja generišu ove raspodele *ponaosob*, zadovoljavaju jednačine:

$$
\begin{aligned}
&div\mathbf{E}_1 = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_1, && div\mathbf{E}_2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_2,\\
&div\mathbf{B}_1 = 0, && div\mathbf{B}_2 = 0,\\
&rot\mathbf{E}_1 = -\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}, && rot\mathbf{E}_2 = -\frac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial t},\\
&rot\mathbf{B}_1 = \mu_0\mathbf{j}_1 + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t}, && rot\mathbf{B}_2 = \mu_0\mathbf{j}_2 + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial t}.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Ukoliko su *istovremeno prisutne* obe raspodele, generisano elektromagnetno polje $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ zadovoljava jednačine

$$
\begin{aligned}
&div\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho_1 + \rho_2\right),\\
&div\mathbf{B} = 0,\\
&rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\\
&rot\mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2\right) + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Sabiranjem odgovarajućih jednačina (32) može se videti da, zbog linearnosti Maksvelovih jednačina, mora biti

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2. \tag{34}$$

Drugim rečima, može se zaključiti da Maksvelove jednačine predviđaju *princip superpozicije,* najpre eksperimentalno konstatovan kod statičkih polja, važi i kod vremenski promenljivih polja.

[10] U praksi, ove gustine su najčešće različite od nule samo u nekoj ograničenoj oblasti. Međurim, bez umanjivanja opštosti rasuđivanja, mora se uzeti da je reč o funkcijama definisanim u celom prostoru, stim da su izvan spomenute oblasti gustine jednake nuli. Ovakav prilaz olakšava izvođenja i uprošćava pisanje mnogih formula.

8. Samousaglašeno određivanje elektromagnetnog polja u vakuumu

<u>Problem konzistentnog nalaženja polja.</u> **-** Veličine koje karakterišu izvore polja $(\rho, \mathbf{j})$ i samo elektromagnetno polje $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ *uzajamno su uslovljene*. S jedne strane, naelektrisane čestice generišu elektromagnetno polje (tj. određuju $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$), dok s druge strane elektromagnetno polje Lorentzovom silom utiče na kretanje naelektrisanih čestica u njemu (a time određuje ρ i $\mathbf{j}$). Prema tome, Maksvelove jednačine (sistem 24) treba posmatrati samo kao relacije koje izražavaju *uzajamnu uslovljenost izvora i genreisanih polja*. Drugim rečima, u njima se ni gustine (ρ i $\mathbf{j}$) ni jačine polja ($\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$) ne mogu smatrati unapred poznatim, jer se u svakoj konkretnoj fizičkoj situaciji te veličine *uzajamno usklađuju*, pa se moraju *istovremeno i samousaglašeno* određivati.
Maksvelove jednačine očevidno nisu dovoljne za ovo, jer broj veličina relevantnih za elektrodinamičku situaciju premaša broj raspoloživih jednačina. Tih veličina ima, konkretno, *deset*, (skalarna veličina ρ i po tri skalarne komponete vektorskih veličina $\mathbf{j}, \mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$), dok se Maksvelove jednačine svode na svega *osam* skalarnih relacija[11] (od čega je, zbog jednačine kontinuiteta, svega *šest* nezavisnih).
Kod samousaglašenog određivanja elektromagnetnog polja (u vakuumu) treba, dakle, poći od sistema jednačina

$$div\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{\alpha=1}^{N} q_\alpha \delta\left[\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha(t)\right], \tag{35}$$

$$div\mathbf{B} = 0, \tag{36}$$

$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{37}$$

$$rot\mathbf{B} = \mu_0\left\{\sum_{\alpha=1}^{N} q_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha(t)\delta\left[\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha(t)\right] + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right\} \tag{38}$$

dobijenog kombinovanjem jednačina u sistemu (24) sa definicijama gustine struje i naelektrisanja[12] (videti paragraf *Osnovni pojmovi elektrodinamike*). Ovim jednačinama je uspostavljena veza između elektromagnetnog polja (tj. $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$) i vektora položaja i brzina pojedinih čestica, tj. *opisan je uticaj kretanja čestica na generisano polje*.
Obrnuti uticaj polja na kretanje čestica opisuje se jednačinama kretanja čestica u polju

[11] Videti paragraf 2.6.1 na strani 58, u knjizi: B. Milić *Meksvelova elektrodinamika* (Beograd, 2002).

[12] $\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha=1}^{N} q_\alpha \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha(t)]$; $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha=1}^{N} q_\alpha \mathbf{v}_\alpha(t)\delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha(t)]$.

$$\frac{d\mathbf{p}_\alpha}{dt} = q_\alpha \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}_\alpha, t) + \dot{\mathbf{r}}_\alpha \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_\alpha, t)\right], \qquad (a = 1, 2, ..., N) \tag{39}$$

pri čemu je, sasvim uopšte[13]

$$\mathbf{p}_\alpha = \frac{m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha}{\sqrt{1 - \frac{|\dot{\mathbf{r}}_\alpha|^2}{c^2}}}. \tag{40}$$

Elektromagnetno polje određeno ovakvim samosusaglašenim postupkom simultanog rešavanja jednačina (35-40) često se i samo kraće naziva *samousaglašeno elektromagnetno polje*.

Potpuno je jasno da samousaglašeno određivanje elektromagnetnog polja zalazi u domen fizike mnogočestičnih sistema (i to onih sa elektromagnetnim interakcijama među česticama). Taj problem se, stoga, suočava sa tipičnim opštim teškoćama koje se sreću u ovom domenu. Naime, broj jednačina čije se simultano rešavanje zahteva je ogroman, početni uslovi su nedovoljno poznati, a informacija koja bi se rešavanjem dobila (kad bi ono i bilo moguće) bila bi previše detaljna da bi mogla biti korišćena u praksi. Izlaz iz tih teškoća se traži na način tipičan za fiziku mnodočestičnih sistema, tj. kretanje sistema čestica se opisuje *hidrodinamički* ili *statistički*. Treba napomenuti da je statsistički prilaz fundamentalniji, ali je hidrodinamički u praksi najčešće pogodniji. O ova dva pristupa biće više detalja u okviru kursa Fizika plazme.

[13] Za relativističke čestice je $\mathbf{p} = m\mathbf{v}\left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$, a za nerelativističke je $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Relacija (39) važi u oba slučaja.